Problem 1

a) 0∈S, ∀n∈S(n-2∈S∨n+2∈S)

b) 3∈S, ∀n∈S(3n∈S)

c) 0∈S, ∀p(x)∈S(∀a∈Z ∀n∈N (p(x) + ax^n)∈S))

Problem 2

设 P(n)是命题: 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 2n 个区域.

基础步骤: 命题 P(1)为真, 平面上过一点的 1 条直线将平面分为 2 个区域.

归纳步骤: 假设对正整数 k, P(k)为真, 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 2n 个区域. 证明在归纳假设下 P(k+1)必为真, 即过一点的 n+1 条直线将平面分为 2(n+1)个区域设第 n+1 条直线 l, l 与前 n 条直线都不重合, 设与 l 距离最近的直线为 l1 和 l2,

则 l 将 l1 和 l2 之间形成的 2 个区域分别分为 2 个, l1 与 l2 之间共 4 个区域,

前 n 条直线除去 l1, l2 之间共形成 2n-2 个区域, 则 n+1 条共形成 2n-2+4 = 2n+2 个. 根据数学归纳法可知对所有的正整数 n, P(n)为真.

得出结论: 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 2n 个区域.

Problem 3

设 P(n)是命题: ∑n k=1 k^3 = (∑n k=1 k)^2.

基础步骤: 命题 P(1)表示 1^3 = 1 = 1^2, P(1)是真的.

归纳步骤: 假设对正整数 k, P(k)为真, 即 1^3 + 2^3 +…+ k^3 = (1+2+…k)^2. 证明在归纳假设下 P(k+1)必为真, 即 1^3 +…+ (k+1)^3 = (1+2+…+(k+1))^2. 等式左边= (1^3 + 2^3 +…+ k^3) + (k+1)^3 = (1+2+…k)^2 + (k+1)^3

=(k(k+1)/2)^2 + (k+1)^3 = ((k+1)(k+2)/2)^2 = (1+2+…+(k+1))^2 =右边.

根据数学归纳法可知对所有的正整数 n, P(n)为真. 得出结论: ∑n k=1 k^3 = (∑n k=1 k)^2.

Problem 4

1. Pm,m 表示用不超过 m 的正整数之和来表示 m 的不同方式数

Pm 表示 m 不同分拆的数目, 显然分拆正整数必不大于 m, Pm,m = Pm.

1. 1° 1 的分拆只有一种方式, 即 1=1, 显然 P1,n = 1.

2° 用不超过 1 的正整数(即 1)表示 m 只一种方式, m = 1+1+…+1 (m 个 1), Pm,1 = 1.

3° 当 m<n 时, 由于 m 分拆得到的正整数必不大于 m, Pm,n = Pm,m.

4° 用不超过 m-1 的正整数表示 m 有 Pm,m-1 种方式, 用超过 m-1 的正整数(即 m) 表示 m 只有一种方式, 即 m=m, Pm,m = 1 + Pm,m-1.

5° 用不超过 n-1 的正整数表示 m 有 Pm,n-1 种方式, 用不超过 n 的正整数表示 m 分为两种情形, 若一定不使用 n, 有 Pm,n-1 种, 若一定使用 n, 等价先对 m 减去一个 n, 再用不超过 n 的正整数表示 m-n, 有 Pm-n,n 种, 所以 Pm,n = Pm,n-1+Pm-n,n.

c) P5 = P5,5 = 1+P5,4 = 1+P5,3+P1,4 = 1+P5,2+P2,3+P1,1 = 1+P5,1+P3,2+P2,2+1

= 1+1+P3,1+P1,2+1+P2,1+1 = 1+1+1+P1,1+1+1+1 = 6+1 =7.

P6 = P6,6 = 1+P6,5 = 1+P6,4+P1,5 = 1+P6,3+P2,4+P1,1 = 1+P6,2+P3,3+P2,2+1

= 2+P6,1+P4,2+1+P3,2+1+P2,1 = 4+1+P4,1+P2,2+P3,1+P1,2+1

= 6+1+1+P2,1+1+P1,1 = 9+1+1 = 11.

Problem 5

a) 对 于 x∈D = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, m(x) = x;

对于 s=tx, 其中 t∈D\*且 x∈D, m(s) = m(tx) = min(m(t), x).

b) 将 t 表示为 t=ωx, 其中ω∈D\*且 x∈D.

基础步骤: 对于ω=λ, m(s·t) = m(sx) = min(m(s), x) = min(m(s), m(x));

归纳步骤: 对于ω≠λ, 假设 m(s·ω) = min(m(s), m(ω))成立, 则对 t=ωx 有m(s·t) = m((sω)x) = min(m(sω), x) = min(min(m(s), m(ω)), x

= min(m(s), min(m(ω), x) = min(m(s), m(ωx)) = min(m(s), m(t)).

根据结构归纳法可知对所有的 t∈D\*, m(s·t) = min(m(s), m(t))均成立. 得出结论: m(s·t) = min(m(s), m(t)).

Problem 6

设 P(n)是命题: 对所有正整数n 有 lim x→∞ (ln x)^n/x = 0.

基础步骤: 对于 n=1 由洛必达法则lim x→∞ lnx/x = lim x→∞ 1/x = 0, P(1)成立. 归纳步骤: 假设对于 n=k 有 lim x→∞ (lnx)^k/x = 0, 则对 n=k+1 由洛必达法则

lim x→∞ (lnx)^(k+1)/x = lim x→∞ (k+1)(lnx)^k/x = (k+1) lim x→∞ (lnx)^k/x k+1 为有界变量, lim x→∞ (lnx)^(k+1)/x = 0, P(k+1)成立.

根据数学归纳法可知对所有正整数 n, P(n)成立.

得出结论: 当 n 为正整数时, lim x→∞ (lnx)^n/x = 0.

Problem 7

1° 存在性：设存在大于 1 的自然数 x 既不是质数, 也不能写为 2 个或以上的质数的积. 则存在非空集合 S, 使得对所有符合上述条件的 x 都有 x∈S.

由良序原理可知 S 中存在一个最小的元素 n, n 不是质数, 则 n 可以写成 a \* b. 且 1<a<n, 1<b<n，n 是 S 中最小的元素, 所以 a, b 不属于集合 S.

则 a 和 b 要么是质数, 要么可以写成 2 个或以上质数的乘积,

即 n 可以写成若干质数的乘积, 矛盾, S 是空集, 不存在这样的自然数 x.

2° 唯一性: 设存在大于 1 的自然数 x 质因子按大小排列之后的写法多于一种. 则存在非空集合 S, 使得对所有符合上述条件的 x 都有 x∈S.

由良序原理可知 S 中存在一个最小的元素 n, n 质因子按大小排列的写法多于一种. 则 n 不是质数，设 n = p1\*p2\*…\*pn = q1\*q2\*…\*qk, 存在 1≤i≤n 使 pi≠qi.

由裴蜀定理可知存在 i, j 使 pi | qj (1≤i≤k, 1≤j≤k), 由于 pi, qj 均为质数, 则 pi = qj 存在一个比 n 小的元素 m, 使 m = p1\*…\*pi-1\*pi+1\*…\*pk = q1\*…\*qj-1\*qj+1\*…\*qk, 且 m 也满足 S 要求的性质, m∈S, 与 n 是 S 中最小的元素矛盾.

综上所述, 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.